

# Einbettung von Minkowski-Raum und Maxwell-Gleichungen des Vakuums in einen 5-dimensionalen Riemannschen Raum

Dr. Detlef Hoyer

Sommer 2004

## ABSTRAKT

Vor 150 Jahren, im Sommer 1854, hielt Bernhard Riemann seinen Habilitationvortrag vor Carl Friedrich Gauß in Göttingen und schuf damit die wissenschaftliche Grundlage, um Minkowski-Raum und Elektromagnetismus zusammenzufassen: die nach ihm benannte Riemannsche Geometrie. Zur gleichen Zeit begann Maxwell sein Programm zum Elektromagnetismus und auch Riemann entwickelte eine Wellengleichung für das elektrische Potential.

Die Riemannsche Geometrie ist natürlich auch die Grundlage für die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins, die wir hier aber nicht benötigen und auch nicht erörtern wollen.

Für die Durchführung der Einbettung fehlen zur Riemannschen Geometrie zum einen noch das Michelson-Morley (1881) Experiment und seine Deutung durch die Spezielle Relativitätstheorie, um zusätzlich auch indefinite Metriken in Betracht zu ziehen und den Minkowski-Raum definieren zu müssen, zum anderen Kaluzas Ansatz, die Differentialoperatoren der Maxwell-Gleichungen in einem Krümmungstensor unterzubringen..

Diese Durchführung der Einbettung wird hier nur unter Verwendung von Differentialgeometrie (Krümmungstensor) mit indefiniter Metrik und den Maxwell-Gleichungen vorgestellt, ohne die allgemeine Relativitätstheorie weder vorauszusetzen noch zu verwenden.

Man erhält aber als weiteres Ergebnis die elektromagnetische Energie als Quelle einer Krümmung, also einen Hinweis auf die Allgemeine Relativitätstheorie, allerdings für einen ganz anderen Weg als Einstein ihn beschritt.

## 1 Einleitung

Die Riemannsche Geometrie ist ein sehr allgemeines Konzept, in dem man leicht die Euklidische, Gaußsche, Bolaysche und Lobatschevskische Geometrie unterbringen kann. Sie ist jedoch keine Verallgemeinerung dieser Geometrien, sondern

baut auf ganz anderen Grundlagen auf. Die Einbettung von Minkowski-Raum und Maxwell-Gleichungen in einen 5-dimensionalen Riemannschen Raum ist zunächst reine Mathematik und soll dies auch bleiben, um die Literatur zur Klassischen Elektrodynamik zu erweitern und eine Brücke zur Kaluza-Theorie zu schlagen und nicht um ein physikalisches Modell zu sein. Für schwache Felder nähern sich die gewonnenen Gleichungen der Realität beliebig nahe an, entsprechen ihr exakt aber erst, wenn die Felder auch beliebig klein werden.

Dass diese Einbettung gelingt, ist dennoch überraschend und als ein von Kaluza gefundenes Wunder bekannt. Kaluza vereinte in der nach ihm benannten Theorie die Gravitation - die wir hier ausblenden durch Verwendung der Minkowski-Metrik - mit dem Elektromagnetismus und begründete das Konzept: Kraft = Raumkrümmung.

Riemann verfolgte schon 70 Jahre vorher einen ähnlichen Ansatz. In seinen physikalischen Spekulationen vom 1. März 1853 betrachtet er Verformungen eines hypothetischen flüssigen Stoffes im dreidimensionalen Euklidischen Raum. Er wird dabei auf eine quadratische Differentialform geführt, deren Koeffizienten außer von den drei Raumkoordinaten auch noch von der Zeit abhängen. Er hat damit eine Schar von Riemannschen Metriken im dreidimensionalen Raum, die er mit der Ausbreitung von Gravitation, Licht und strahlender Wärme in Zusammenhang bringen will, ein Grundgedanke für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus. Wie Dedekind aus einem Brief vom 28. Dezember 1853 zitiert hat Riemann sich nach Abfassung seiner Habilitationsschrift sofort wieder mit der Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Elektrizität, Galvanismus, Licht und Schwere befasst. Er sei damit soweit gekommen, dass er diese Arbeit unbedenklich veröffentlichen könne und er habe Grund zu der Annahme, dass Gauß seit mehreren Jahren auch daran arbeite.

Zu einer Veröffentlichung hat er sich dann doch nicht entschlossen. Er berichtet aber am 26. Juni 1854, wieder in einem Brief an den Bruder, dass er sich wieder so in diesen Zusammenhang der physikalischen Grundgesetze vertieft habe, dass er nicht davon los kommen konnte, auch als ihm das geometrische Thema für die Habilitationsvorlesung gestellt wurde. In dieser hat er dann ganz am Schluss die physikalische Überlegung angedeutet: der Grund für die Maßverhältnisse im Raum müsse in auf den Raum wirkenden Kräften gesucht werden, ähnlich der Oberflächenspannung auf einem schwingenden, frei fallenden Wassertropfen.

## 2 Die wissenschaftliche Methode

Die Naturwissenschaften gelangen über Versuche und Beobachtungen zu ihren Erkenntnissen und Ergebnissen. Die unmittelbaren Resultate dieser Beobachtungen und Messungen bilden jedoch eine zusammenhanglose Sammlung von Angaben, aus denen man allgemeinere Zusammenhänge oder Gesetzmäßigkeiten abzuleiten sucht. Die aus dem umfangreichen Beobachtungsmaterial gewonnenen Teilgesetze werden zu einer Theorie zusammengefasst. Diese so genannte induk-

tive Methode wird heute als die grundlegende Forschungsmethode der Naturwissenschaften betrachtet.

Die auf induktivem Weg erhaltenen Grundgleichungen verallgemeinern die Versuchsergebnisse. Dadurch ist der Inhalt der gefundenen Grundgleichungen stets größer als die zugrunde liegenden experimentellen Fakten. Denn nun können sämtliche Behauptungen deduktiv – analog der Methode der Geometrie – von diesen Grundgleichungen abgeleitet werden. Die Richtigkeit dieser Axiome kann nur durch die Übereinstimmung der von ihnen abgeleiteten Folgerungen mit den Messergebnissen bewiesen werden.

Es ist a priori überhaupt nicht sicher, ob eine von Grundgleichungen ausgehende Behandlungsweise in den Naturwissenschaften möglich ist. Dass die Versuchsergebnisse der Vergangenheit, der Gegenwart und der Zukunft anhand einiger Gleichungen bestimmbar sind, dass die Struktur der Außenwelt so beschaffen ist, stellt eine überraschende Tatsache dar und ist zu den Grundproblemen der Naturphilosophie zu rechnen, denn es wäre auch eine Anhäufung von Versuchsergebnissen vorstellbar, die keine Zusammenfassung zu einem einheitlichen Ganzen gestatten.

Für die drei zuerst bekannten Kräfte Elektrizität, Magnetismus und Gravitation wurden die statischen Gesetze leicht gefunden:

$$F_{mag} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{r^2} \quad F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad F_{grav} = \gamma \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad (1)$$

Alle drei setzen sich aus einem Produkt der Quellenstärken sowie dem reziproken Abstandsquadrat zusammen. Dies ließ gleich einen Zusammenhang der drei Kräfte vermuten. Schon Faraday unternahm Versuche mit bewegten Ladungen im Gravitationsfeld im shot tower der houses of parliament, konnte aber nichts feststellen. Eine Zusammenfassung der Elektrizität mit der Gravitation gelang nicht.

Hingegen stellte Oerstedt 1820 fest, dass bewegte Ladungen ein Magnetfeld mit sich führen. Die Beschreibung der dynamischen Gesetze gestaltete sich wesentlich schwieriger als die der statischen. Zwischenergebnisse schienen sogar den Energieerhaltungssatz zu verletzen. Schließlich konnten bekanntlich beide Felder zu einem Elektromagnetischen Feld zusammengefasst werden, jedoch mit wesentlich komplexeren Gesetzen als in der Statik. Woher kommt die Komplexität mit Gradient, Rotation und Vektopotential?

Inzwischen ist die klassische Elektrodynamik ein historisch abgeschlossenes und völlig deduktiv behandelbares Gebiet, deshalb fehlen dort auch Hinweise auf den Kaluza-Ansatz. In erster Linie an die experimentellen Resultate und das Begriffssystem Faradays anknüpfend, legte Maxwell im Jahr 1873 in seinem Buch "A treatise on Electricity and Magnetism" sämtliche damals vorhandenen Kenntnisse über die Elektrizität nieder. Er erfasste in seinen Grundgleichungen nicht nur die bis dahin erhaltenen Versuchsergebnisse, sondern auch im Voraus die experimentellen Resultate der darauf folgenden 20 Jahre. Aussagen über elektromagnetische Wellen waren nämlich in den Grundgleichungen von

Maxwell enthalten, obwohl ihre Existenz erst etwa 20 Jahre später durch Versuche bewiesen wurde (Heinrich Hertz 1888). Eine Fülle von Erscheinungen werden seitdem durch diese Grundgleichungen in der Elektrodynamik zusammengefasst: Elektrizität, Magnetismus, Radiowellen, Mikrowellen, Wärmestrahlung, Licht, Ultra-Violett- und Röntgenstrahlung.

Auf der Grundlage der Maxwellschen Gleichungen kann die gesamte Elektrodynamik deduktiv, *more geometrico*, behandelt werden. Eine Erörterung dieser Grundgleichungen würde ihre Zurückführung auf irgendeine von uns unmittelbar einzusehende und daher akzeptierbare Erscheinung bedeuten. Als ein erfolgreiches Konzept hat sich die Erklärung durch die Mechanik von Teilsystemen erwiesen, wie z.B. in der kinetischen Gastheorie.

Man hat daher versucht, auch die Maxwellschen Gleichungen auf mechanische Begriffe zurückzuführen, was aber nicht möglich ist. Dieses Erkenntnis war das Ergebnis eines lang andauernden historischen Prozesses.

Ein anderes erfolgreiches Konzept ist das der Raumkrümmung, wie es Einstein 1915 zur Erklärung der Gravitationskraft eingeführt hat. Durch die Erweiterung dieses Konzeptes konnte Kaluza 1921 die elektromagnetische Kraft ebenfalls auf eine Raumkrümmung zurückführen, in dem er die Maxwellschen Gleichungen auf die Krümmung der 5. Dimension zurückführte. Damit war ein einheitliches Konzept gefunden, dessen Existenz vermutet und gesucht wurde, seit die Kraftgesetze der drei damals zuerst bekannten Kräfte gefunden waren. Wie wir später sehen werden, besitzt der Krümmungstensor die nötige Komplexität, um die gestellte Frage zu beantworten.

Bevor die Maxwell-Gleichungen aus einem neuen Blickwinkel betrachtet werden, sollen kurz die Grundlagen rekapituliert werden, und zwar anhand von den drei Fragen: 1.) Was wird heute verstanden als Maxwell-Gleichungen, 2.) Welches Phänomen verbirgt sich hinter den Maxwell-Gleichungen und 3.) Wie kann man sie aus einem fünfdimensionalen Krümmungstensor erhalten ?

### 3 Was verstehen wir heute als Maxwell-Gleichungen?

Ein Schlüssel zum Verständnis des Elektromagnetismus war Faradays damals sehr unkonventionelle Vorstellung von elektrischen und magnetischen *Kraftlinien* (Feldlinien), die eine Ladung oder einen Magneten umgeben und sich über den gesamten Raum erstrecken sollten. Entlang ihres Verlaufs werden Probeladungen bzw. -magnete vom einen zum anderen Ende gezogen, wodurch sich die Kraftlinien nachzeichnen lassen. Die Kraftlinien sollen im Raum auch vorhanden sein, wenn gar kein Probekörper da ist, auf den sie wirken können. Sie geben so für jeden Punkt des Raumes eine Kraft vor, wodurch ein *Kraftfeld* definiert ist.

So entstand die erste *Feldtheorie*, die eine *Nahwirkungstheorie* ist, denn nach Faraday wechselwirkten beispielsweise Eisenspäne mit den Feldlinien in ihrer Nähe und nicht mit dem entfernten Magneten. Dagegen ist das Newtonsche Gravitationsgesetz eine Fernwirkungstheorie, bei der die Kräfte direkt in

Massenpunkten angreifen sollten, ohne etwas darüber auszusagen, was im Raum zwischen den Massenpunkten vor sich geht.

Ein Kraftfeld lässt sich dadurch darstellen, dass man jedem Punkt im Raum zu jedem Zeitpunkt einen Pfeil zuordnet, dessen Richtung mit der Richtung der Kraft übereinstimmt und dessen Länge der Stärke der Kraft entspricht. Die mathematisch exakte Beschreibung hierfür ist ein *zeitabhängiges Vektorfeld*.

In den vier Maxwell'schen Gleichungen in der heutigen Form von Hertz und Heaviside treten daher auch genau zwei zeitabhängige Vektorfelder auf: das *Vektorfeld*  $E$  für das elektrische Kraftfeld und das *Vektorfeld*  $B$  für das magnetische Kraftfeld.

In einem Vektorfeld gibt es Punkte im Raum, an denen viele Feldlinien beginnen (*Quelle*) und andere Punkte, an den sie enden (*Senke*). Es gibt auch Feldlinien, die von einem beliebigen Punkt aus durch den Raum verlaufen und wieder zu diesem Punkt zurückführen, also ringförmig geschlossen sind (*Wirbelfeld*). Auch hierfür gibt es eine mathematisch exakte Beschreibung aus der Vektoranalysis: die Operatoren *Divergenz* ( $\text{div}$ ) und *Rotation* ( $\text{rot}$ ), die auch beide in den Maxwell-Gleichungen auftreten.

Der *Divergenz-Operator* ergibt an Punkten im Raum, in denen *Quellen* angebracht sind (positive Ladungen), einen positiven Wert, dagegen an Punkten, in denen Senken vorhanden sind (negative Ladungen), einen negativen Wert und an allen anderen Stellen, durch die Feldlinien nur hindurch gehen, ergibt er Null (leerer Raum). Es folgt daher, dass ein reines Wirbelfeld, in dem Feldlinien keinen Anfangs- oder Endpunkt besitzen, die Divergenz überall Null ergibt (ein Magnetfeld hat keine magnetischen Ladungen).

Um den *Rotations-Operator* zu beschreiben, muss man in die Hydrodynamik wechseln, in der Vektorfelder die Geschwindigkeiten einer strömenden Flüssigkeit darstellen (Wasser). Legt man einen Korken auf die Oberfläche einer solchen strömenden Flüssigkeit, so beschreibt der Rotations-Operator, der auf das Geschwindigkeitsfeld angewendet wird, die Drehung des Korkens um die eigene Achse. Nur wenn der Korken sich dreht, ist die Rotation von Null verschieden, das Geschwindigkeitsfeld hat an dieser Stelle einen *Wirbel*. Das ist nicht nur in einem Strudel der Fall, bei dem die Geschwindigkeitsvektoren Kreise um das Zentrum des Strudels beschreiben. Auch in einem gleichmäßig dahinströmenden Fluss, bei dem die Geschwindigkeit von der Mitte des Stromes zu den Ufern hin abnimmt, wird ein Korken sich drehen, denn der zur Mitte zeigende Teil wird schneller bewegt als der zum Ufer hinweisende. Obwohl die Geschwindigkeitsvektoren alle parallel in dieselbe Richtung weisen, enthält dieses Strömungsfeld Wirbel, die durch die sich quer zur Strömung ändernde Geschwindigkeit verursacht werden.

Kennt man von einem Vektorfeld alle Punkte im Raum, an denen Divergenzen (Quellen und Senken) vorhanden sind sowie deren Stärke und alle Punkte, an denen die Rotation von Null verschieden ist (Wirbel) und deren Stärke, so ist dadurch das gesamte Vektorfeld damit bereits eindeutig festgelegt (*Helmholtzsches Theorem*) und man könnte alle Feldlinien berechnen.

Nun kommen wir zu Antwort auf die erste Frage: *Die Maxwell'schen Gleichungen beschreiben zwei gekoppelte Vektorfelder, indem sie für jedes der beiden Felder die Quellen und Wirbel angeben ( $\text{div } E$ ,  $\text{rot } E$ ,  $\text{div } B$ ,  $\text{rot } B$ ). Über das Helmholtz'sche Theorem sind damit die Felder vollständig festgelegt.*

Für den weitergehend interessierten Leser führen wir hier noch die exakten Formeln auf:

### 1. Maxwell'sche Gleichung

Quellen und Senken des elektrischen Feldes sind positive und negative elektrische Ladungen. Elektrische Feldlinien beginnen an positiven Ladungen und enden an negativen. Die Divergenz des elektrischen Feldes an einem Punkt des Raumes ist proportional zur dort vorhandene Ladungsdichte  $\rho$ . Der reziproke Proportionalitätsfaktor ist die Dielektrizitätskonstante des Raumes  $\epsilon_0$ .

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

### 2. Maxwell'sche Gleichung

Das magnetische Feld hat keine Quellen und Senken. Es gibt keine Ladungen für das Magnetfeld. Magnetische Feldlinien bilden (meist ringartig) geschlossene Kurven ohne Anfang und Ende. Die Divergenz des magnetischen Feldes ist daher in jedem Punkt des Raumes immer Null.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

### 3. Maxwell'sche Gleichung

Der Wirbel des elektrischen Feldes an einem Punkt ist der zeitlichen Änderung des dort vorhandenen Magnetfeldes entgegengesetzt proportional. Elektrische Feldlinien verlaufen beispielsweise ringförmig um ein entlang der Achse zeitlich veränderliches Magnetfeld. Die Rotation des elektrischen Feldes an einem Punkt des Raumes ist proportional zur Änderung zum dort vorhandenen Magnetfeld  $\mathbf{B}$ . Der Proportionalitätsfaktor ist die magnetische Permeabilität des Raumes  $\mu_0$ .

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

### 4. Maxwell'sche Gleichung

Der Wirbel des magnetischen Feldes an einem Punkt ist gegeben durch eine dort vorhandene Stromdichte  $\mathbf{j}$  oder der zeitlichen Änderung eines dort vorhandenen elektrischen Feldes. Magnetische Feldlinien verlaufen beispielsweise ringförmig um einen entlang der Achse fließenden Strom oder um ein entlang der Achse zeitlich veränderliches elektrisches Feld. Die Rotation des magnetischen Feldes an einem Punkt des Raumes ist proportional zum dort vorhandenen Strom oder zur Änderung des dort vorhandenen elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$ .

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Eine Kopplung der beiden Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  tritt in der 3. und 4. Maxwell'schen Gleichung dadurch auf, dass die zeitliche Änderung jedes der beiden Felder den Wirbel des anderen darstellt.

## 4 Welches Phänomen verbirgt sich hinter den Maxwell-Gleichungen?

Die Maxwell-Gleichungen geben für jedes elektrische und magnetische Feld die Quellen und Wirbel an, über die nach dem Helmholtzschen Theorem dann das gesamte Feld eindeutig festgelegt ist. Als *grundlegende mathematische Gesetze* geben die Maxwell Gleichungen aber nicht Auskunft darüber, welche Größe eine Ursache ist und welche einen Effekt darstellt (*sie geben keinen kausalen Zusammenhang an*).

### 4.1 Akausale Beschreibung des elektrischen und magnetischen Feldes als duale Entität

*Ursache aller elektrischen und magnetischen Felder sind immer Ladungen und Ströme (ruhende Ladungen und bewegte Ladungen).*

In der 3. Maxwellschen Gleichung  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$  wird daher eine grundlegende Aussage über die Gleichheit zweier simultan auftretender Effekte gemacht. Ein zeitlich veränderlicher Strom (dazu zählen auch die Kreisströme der Elementarmagneten eines bewegten Magneten) hat sowohl ein elektrisches Wirbelfeld (Faraday Induktion) als auch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld zur Folge und diese beiden Effekte sind dann nach der 3. Maxwellschen Gleichung immer simultan gleich.

Die Kopplung der beiden Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  durch die Maxwell Gleichungen ist also derart, daß die beiden Felder als duale Entität auftreten. Deshalb werden die beiden Teilfelder zusammengefasst zu einem einzigen elektromagnetischen Feld mit sechs Komponenten (drei elektrische und drei magnetische) und man spricht statt von Elektrizität und Magnetismus nur noch vom Elektromagnetismus (Anmerkung: aus dem gerade Gesagten geht klar hervor, dass die Aussage falsch ist, bei Induktion oder Wellenausbreitung würden zeitlich veränderliche Magnetfelder ein elektrisches Feld verursachen oder umgekehrt [1]).

### 4.2 Ermöglichung der Ableitung des elektromagnetischen Feldes aus 4 Potentialen

Aus der 2. und 3. Maxwellschen Gleichung folgt, dass sich die beiden Felder aus Potentialen ableiten lassen. Da das Magnetfeld keine Quellen und Senken besitzt, folgt aus der 2. Maxwellschen Gleichung, dass sich das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  als Rotation eines anderen Vektorfeldes  $\mathbf{A}$  darstellen lässt (als Integrationskonstante kann noch ein Skalarpotential  $\psi$  auftreten, das hier als gleich Null gewählt werden darf).

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$$

Die drei von den Koordinaten  $\mathbf{r}$  und dem Zeitpunkt  $t$  abhängenden Komponenten des Vektors  $\mathbf{A}$  kann man auch als drei skalare Potentiale auffassen:

$$A_1(\mathbf{r}, t) \quad A_2(\mathbf{r}, t) \quad A_3(\mathbf{r}, t)$$

Das *Vektorpotential*  $\mathbf{A}$  kann man nun in die dritte Maxwellsche Gleichung einsetzen und umformen:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Da der Ausdruck in der Klammer keine Wirbel hat, folgt, dass er sich als Gradient eines Skalarpotentials  $\varphi$  schreiben lässt:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$$

Man kann also  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}$  aus  $\mathbf{A}$  und  $\varphi$  berechnen. Die elektromagnetischen Potentiale wurden hier zwar (klassische Theorie) als Hilfsgrößen formal eingeführt, *sind aber in weiterführenden Theorien echte, nicht ersetzbare Felder mit physikalischem Inhalt* (Schrödinger-Gleichung, QED, Proca-Gleichungen).

### 4.3 Äquivalenz zu Wellengleichungen

Durch die Wahl der Potentiale sind zwei der Maxwellschen Gleichungen schon erfüllt. Durch Einsetzen in die 4. Maxwellsche Gleichung erhält man die *Wellengleichungen* für das Vektorpotential. Die Wellengleichungen für die Felder schreiben wir hier nicht extra auf.

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} - \mu_0\epsilon_0\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{j}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{j}$$

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \Delta\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{j}$$

Aufgrund der vorhandenen Freiheit in der Wahl der Potentiale kann man diese immer so wählen, dass der Ausdruck in der Klammer Null wird (*Lorentz-Eichung*).

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Dies ist die Wellengleichung, der  $\mathbf{A}$  gehorcht. Durch Einsetzen in die 1. Maxwell'sche Gleichung erhält man die Wellengleichungen für das Skalarpotential:

$$\operatorname{div} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Aufgrund der Lorentz-Eichung kann man hier  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  ersetzen:

$$\Delta \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dies ist die Wellengleichung, der  $\varphi$  gehorcht. Wenn auf der rechten Seite die Stromdichte  $\mathbf{j}$  und die Ladungsdichte  $\rho$  Null sind, so handelt es sich um homogene Wellengleichungen. Die Lösung sind fortschreitende Wellen im leeren Raum. Bei den angegebenen Gleichungen handelt es sich um die inhomogenen Wellengleichungen, bei denen auch Raumpunkte mit Sendern eingeschlossen sind.

Bei Wellengleichungen steht vor der zweifachen Zeitableitung der Kehrwert des Quadrats der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen. Das die Lichtgeschwindigkeit  $c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  ist, war die Bestätigung, dass Licht aus elektromagnetischen Wellen besteht.

#### 4.4 Bezug der Wellengleichungen zum Koordinatensystem

Das Nullresultat für den Nachweis von Abweichungen der Lichtgeschwindigkeit von diesem Wert verursacht durch Bewegungen der Lichtquelle führte auf die *spezielle Relativitätstheorie* und zur *Minkowski-Metrik*, in der Raum und Zeit als *Kontinuum* zusammengefasst sind. Daher beinhaltet eine Distanz immer Raum und Zeit. Nach der Relativitätstheorie beurteilt jeder Beobachter in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit mit der er sich bewegt den räumlichen und den zeitlichen Anteil der Distanz unterschiedlich.

Für Distanzen oder andere Vektoren wie Geschwindigkeit und Kraft sind auf der Minkowski-Metrik daher immer 4 Koordinaten anzugeben. So kann man auch  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  zu einer Vierer-Stromdichte zusammenfassen und als rechte Seite einer Vierer-Wellengleichung mit  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  zusammen schreiben.

Mit den Definitionen

$$x_0 = ict, \quad j_0 = ic\rho, \quad A_0 = \frac{i}{c}\varphi$$

fügen sich die beiden Wellengleichungen zu einer Einheit zusammen:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_0^2} = \mu_0 j_k \quad k = 0, 1, 2, 3$$

#### 4.5 Feldtensor ist 4-dimensionale Rotation des Vierervektorpotentials

Der Faraday- oder Feldtensor wird durch eine Gleichung angegeben, mit der seine 16 Komponenten definiert werden [2] :

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad \text{mit } i, k = 0, 1, 2, 3$$

Dies sind die partiellen Differentiale der *4-dimensionalen (4D) Rotation* von  $A_i$ . Sie treten zum Teil auch in der 3D Rotation und dem Gradienten auf, weshalb der Faraday-Tensor unmittelbar die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten enthält. In kartesischen Koordinaten ist:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} & E_x &= ic \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) \\ B_y &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} & E_y &= ic \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right) \\ B_z &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & E_z &= ic \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) \end{aligned}$$

Der Tensor  $F_{ik}$  entspricht der 4D Rotation des Vierervektors  $A_i$ . Er lässt sich durch die elektromagnetischen Feldgrößen folgendermaßen ausdrücken:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & 0 & -B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ -\frac{i}{c}E_x & -\frac{i}{c}E_y & -\frac{i}{c}E_z & 0 \end{bmatrix}$$

Damit haben wir eine physikalische Größe gefunden, die das elektrische und magnetische Feld als duale Einheit zusammenfasst: den elektromagnetischen Feldstärketensor  $F$ .

Mit ihm lassen sich auch die 4 Maxwell-Gleichungen zu zwei Gleichungen zusammenfassen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\nu$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div}\mathbf{B} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

Damit sind wir der Antwort auf die zweite Fragen nahe: *Das Wesen der Maxwell-Gleichungen lässt sich im Feldtensor erkennen, der als 4x4-Matrix dargestellt wird (Null-Diagonale, die 6 Feldkomponenten mit entgegengesetztem Vorzeichen einmal rechts oben und einmal links unten) und durch die 4D Rotation des Vierer-Vektorpotentials gebildet wird, das wiederum die 4 Quell-Komponenten begleitet.*

#### 4.6 Kausales oder retardiertes Vierer-Vektorpotential ist Lösung der inhomogenen Wellengleichungen für die 4 Potentiale

Die Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen an dem Punkt  $\mathbf{r}$  zur Zeit  $t$  ergeben sich mathematisch zu:

$$A_0 = \frac{i}{c\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$A_1 = \mu_0 \int_V \frac{j_1\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$A_2 = \mu_0 \int_V \frac{j_2\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$A_3 = \mu_0 \int_V \frac{j_3\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

Im Integranden stehen im wesentlichen die Quellen (Ursachen). Da Orte, an denen keine Quellen vorhanden sind, nicht zum Integral beitragen, muss nur über das Gebiet der Quellen integriert werden. In die Quellen ist am Ort  $\mathbf{r}'$  eine Zeitverzögerung eingebaut (Retardierung), um die Zeit zu berücksichtigen, die eine Wirkung benötigt, um mit Lichtgeschwindigkeit vom Ort  $\mathbf{r}'$  zum Ort  $\mathbf{r}$  zu gelangen, sowie ein reziproker Abstandsfaktor. Jede Komponente des Vierer-Vektorpotentials geht direkt aus einer Quellen-Komponente hervor. Aus dem Vektorpotential gehen das elektrische und das magnetische Feld simultan hervor:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi$$

Fasst man diese beiden Gleichungen in Tensor-Schreibweise zusammen, so muss man nicht von  $A_0$  auf  $\varphi$  zurück gehen.

## 5 Wie kann man die Maxwell-Gleichungen ableiten ?

Riemann trug im Habilitationsvortrag sein Konzept der Geometrie vor, welches er dadurch charakterisierte, dass Punkte durch Zahlentupel dargestellt werden, die Menge aller Punkte einen Raum bilden, und ein metrischer Raum dadurch entsteht, dass auf der Punktmenge eine Distanzfunktion definiert ist. Dadurch führte Riemann die Geometrie ganz auf die Analysis zurück, im Gegensatz zur Geometrie Euklids, der mit anschaulichen Definitionen beginnt, wie ein Punkt sei was keine Teile hat, eine Linie breitenlose Länge, ein Winkel die Neigung zweier Linien gegeneinander. Ebenso setzt er sich damit von der Flächentheorie Gaußs ab, den gekrümmten Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum, sowie der nicht-euklidischen Geometrie von Bolay und Lobatschevski, welche durch Weglassen des 5. Axioms, dem Parallelenaxiom, entstanden.

Als Distanzfunktion hat Riemann positiv definite quadratische Formen untersucht und er ging davon aus, der nächste einfache Fall wären positiv definite Differentialausdrücke vierten Grades, wohingegen die spezielle Relativitätstheorie auf indefinite quadratische Formen führte, d.h. auf Differenzen zwischen Ausdrücken zweiten Grades, wie z.B.  $x^2 - (ct)^2$ , bei der alle Punkte auf der 45°-Linie den Abstand 0 untereinander haben.

Riemanns allgemeiner Ansatz mit quadratischen Formen ging von Punkten  $P$  in einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit aus

$$P = x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2}$$

die eine Kurve  $x(t)$  bilden, welche vom Anfangspunkt  $P_0 = x(t_0)$  bis zum Endpunkt  $P_1 = x(t_1)$  durchlaufen wird, wenn man den Parameter  $t$  von  $t_0$  bis  $t_1$  laufen lässt:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (3)$$

Zwischen zwei benachbarten Punkten mit dem Koordinatenunterschied

$$dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \quad (4)$$

soll das Differential  $ds$  für den Abstand sein:

$$ds = F(x, dx) \quad (5)$$

d.h., die Distanz hängt ab vom Ort  $x(t)$  und der Koordinatenänderungen  $dx_i(t)$ , die in der Richtung des eingeschlagenen Weges auftreten.

Die Distanz soll unabhängig sein von der Richtung, in der die Kurve durchlaufen wird und sich linear addieren:

$$F(x, k dx) = |k|F(x, dx) \quad (6)$$

Über die Betragsfunktion  $|k| = +\sqrt{k^2}$  und um den euklidischen Raum mit  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$  einzuschließen, folgt, dass  $F^2$  eine homogene Funktion 2. Grades sein soll:

$$F^2(x, k dx) = k^2 F^2(x, dx) \quad (7)$$

und damit eine quadratische Differentialform ist:

$$F^2(x, dx) = g_{ij}(x) dx_i dx_j \quad (8)$$

Dieser Ausdruck heißt *fundamentale quadratische Form* oder *metrische Form*. Durch Integration ist dann die Länge der Kurve definiert:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{F^2(x, \frac{dx}{dt})} dt \quad (9)$$

## 5.1 Metrischer Tensor

Zur Interpretation der  $g_{ij} dx_i dx_j$  betrachten wir nun die Koordinatenlinien  $u_i(t')$  durch einen Punkt  $x(t)$ . Dabei schreiben wir für das festgehaltene  $t$  statt  $x_i(t)$  einfach nur  $x_i$ :

$$u_1(t') = (x_1(t'), x_2, \dots, x_n)$$

$$u_2(t') = (x_1, x_2(t'), \dots, x_n)$$

...

$$u_n(t') = (x_1, x_2, \dots, x_n(t'))$$

Bezeichnen wir nun die Distanz zwischen zwei benachbarten Punkten auf der Koordinatenlinie  $u_i$  mit Koordinatenunterschied  $du_i$

$$ds_i = +\sqrt{F^2(x, du_i)} \quad (10)$$

dann ergibt sich, weil hier für alle  $j \neq i$  ja  $du_j = 0$  ist:

$$ds_i = +\sqrt{g_{ii}(du_i)^2} = +\sqrt{g_{ii}} du_i \quad (11)$$

Mit der Definition:

$$d\mathbf{r} = (ds_1, ds_2, \dots, ds_n) \quad (12)$$

wird dann

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{ds_i}{du_i} = \sqrt{g_{ii}} \mathbf{T}_i = \mathbf{a}_i \quad (13)$$

wobei  $\mathbf{T}_i$  der Einheitstangentenvektort an die  $u_i$ -Kurve im Punkt  $x(t)$  sein soll. Hierin haben wir  $\sqrt{g_{ii}} \mathbf{T}_i$  verkürzt und als  $\mathbf{a}_i$  definiert.

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_n} du_n = \mathbf{a}_1 du_1 + \mathbf{a}_2 du_2 + \dots + \mathbf{a}_n du_n \quad (14)$$

Wir erhalten die Länge von  $d\mathbf{r}$  durch Quadrieren:

$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 du_1^2 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 du_1 du_2 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 du_1 du_3 \\ &+ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 du_2 du_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 du_2^2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 du_2 du_3 \\ &+ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 du_3 du_1 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 du_3 du_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 du_3^2 \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n g_{pq} du_p du_q \text{ wobei } g_{pq} = \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{a}_q \end{aligned}$$

Nehmen wir nun für  $d\mathbf{r}$  eine andere Zerlegung mit den Einheitsnormalenvektoren  $\mathbf{N}_i$  die ebenfalls im Punkt  $x(t)$  der  $u_i$ -Kurve beginnen, jedoch orthogonal auf der Koordinatenfläche durch  $x(t)$  mit  $u_i = \text{const}$ . Wir bekommen solche orthogonalen Vektoren über den Gradienten von  $u_i$ . Da wir die die Länge nicht auf einfache Weise berechnen können, definieren zunächst neue  $g^{pq}$  (andere Werte durch oberen Index gekennzeichnet).

$$d\mathbf{r} = \nabla u_1 du_1 + \nabla u_2 du_2 + \dots + \nabla u_n du_n = \mathbf{b}_1 du_1 + \mathbf{b}_2 du_2 + \dots + \mathbf{b}_n du_n \quad (15)$$

Wir erhalten die Länge von  $d\mathbf{r}$  durch Quadrieren:

$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 du_1^2 + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 du_1 du_2 + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_3 du_1 du_3 \\ &+ \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 du_2 du_1 + \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 du_2^2 + \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_3 du_2 du_3 \\ &+ \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1 du_3 du_1 + \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_2 du_3 du_2 + \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3 du_3^2 \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n g^{pq} du_p du_q \text{ wobei } g^{pq} = \mathbf{b}_p \cdot \mathbf{b}_q \end{aligned}$$

Die Basisvektor-Systeme bilden ein reziprokes System, d.h ihr Skalarprodukt ist jeweils 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 &= 1 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 &= 1 \\ &\dots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_n &= 1 \\ \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n g_{pq} g^{pq} &= 1 \end{aligned}$$

oder mit Einsteinscher Summenkonvention  $g_{pq}g^{pq} = 1$

Damit können die  $g^{pq}$  berechnet werden (inverse Matrix):

$$(g^{pq}) = (g_{pq})^{-1}$$

Die Reziprozität der Basisvektor-Systeme zu den beiden metrischen Tensoren hat auch noch folgenden Vorteil: Zerlegt man einen Vektor  $\mathbf{A}$  nach den  $\mathbf{a}_i$  und  $\mathbf{b}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^1 \mathbf{b}_1 + A^2 \mathbf{b}_2 + \dots + A^n \mathbf{b}_n \\ \mathbf{A} &= A_1 \mathbf{a}_1 + A_2 \mathbf{a}_2 + \dots + A_n \mathbf{a}_n \end{aligned}$$

dann kann man den Betrag des Vektors berechnen zu

$$|\mathbf{A}|^2 = \sum_{p=1}^n A_p A^p$$

Diese beiden zu den Basisvektorsystemen gehörenden metrischen Tensoren beschreiben denselben Raum, haben aber eine unterschiedliche Gestalt, d.h. die Elemente in den Zeilen und Spalten sind verschieden. Die Gestalt eines metrischen Tensors hängt also vom verwendeten Koordinatensystem ab. Den  $g_{pq}(x)$  selbst ist damit nicht unmittelbar anzusehen, ob der Raum eben oder gekrümmt ist. Lässt sich eine Koordinatentransformation auf ein kartesisches Koordinatensystem durchführen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

oder in Zylinderkoordinaten:

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

dann sind im metrischen Tensor nur die Diagonalelemente ungleich Null und der Raum ist eben (und das Koordinatensystem orthogonal). Die Metrik der Kugeloberfläche lässt sich nicht auf eine solche Gestalt bringen:

$$ds^2 = R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Unabhängig von speziellen Koordinatentransformationen kann man aber aus dem metrischen Tensor einen anderen Tensor bilden, den Krümmungstensor,

der genau dann und nur dann Null ist, wenn die Krümmung verschwindet, der Raum also eben ist. Der Krümmungstensor wird aus den Teilausdrücken mit den  $g^{pq}$  und Ableitungen der  $g_{pq}$ , den Christoffelsymbolen, gebildet:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial u^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial u^{\nu}} \right) \quad (16)$$

Dies sind noch keine Tensoren, sondern erst:

$$R_{ikp}^m = \frac{\Gamma_{ik}^m}{\partial u^p} - \frac{\Gamma_{ip}^m}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rp}^m - \Gamma_{ip}^r \Gamma_{rk}^m \quad (17)$$

Genau dann, wenn dieser Tensor verschwindet (Nullmatriix), ist der Raum eben:  $R_{ikp}^m = 0$  für einen nicht gekrümmten Raum. Durch die Differenzen in den Ausdrücken verschwinden oft etliche Terme auch für gekrümmte Räume und vereinfachen die Rechnungen. Es ist eine Vereinfachung mit physikalischer Bedeutung darunter: Verschwindet in den Christoffelsymbolen der erste Term, so ergeben der zweite und dritte einen Ausdruck, der dem Rotationsoperator in den Maxwell'schen Gleichungen entspricht. Kaluzas Idee war nun, den vier Dimensionen, die auch der Minkowski-Raum hat, eine weitere hinzuzufügen, um darin den Elektromagnetismus aufzunehmen.

## 5.2 Boskovich Raum

Wir gehen Daher jetzt über zu einem speziellen Raum und einem speziellen metrischen Tensor, bei denen die ersten vier Dimensionen dem Minkowski Raum entsprechen und fügen einen fünftes lineaer unabhängiges Basisvektorpaar hinzu.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes seien  $x, y, z, t$  (Minkowski-Raum) und  $w$ , die Basisvektoren dazu  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ . Ein zweites Koordinatensystem in diesem fünfdimensionalen Raum habe für die Koordinaten  $x', y', z', t'$  dieselben Basisvektoren im Minkowski-Raum, jedoch als fünften Basisvektor einen schräg zur Minkowski-Hyperfläche gegebenen Vektor  $\mathbf{A}$ .

Ein Radiusvektor  $\mathbf{r}$  lässt sich dann schreiben als:

$$\mathbf{r} = x' \mathbf{i} + y' \mathbf{j} + z' \mathbf{k} + t' \mathbf{l} + u' \mathbf{A}$$

$$x = x' + u' A_x$$

$$y = y' + u' A_y$$

$$z = z' + u' A_z$$

$$t = t' + u' A_t$$

$$w = u' A_w$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x'} dx' + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y'} dy' + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z'} dz' + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} dt' + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'} du' \\ &= \mathbf{i} dx' + \mathbf{j} dy' + \mathbf{k} dz' + \mathbf{l} dt' + (\mathbf{i} A_x + \mathbf{j} A_y + \mathbf{k} A_z + \mathbf{l} A_t + \mathbf{m} A_w) du' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= (dx)^2 + 2A_x dx du' + A^2 (du)^2 + (dy)^2 + 2A_y dy du' \\ &\quad + (dz)^2 + 2A_z dz du' + (dt)^2 + 2A_t dt du' \end{aligned}$$

$$(\gamma_{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & A_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & A_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & A_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & A_t \\ A_x & A_y & A_z & A_t & A^2 \end{pmatrix} \quad |\gamma| = A^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 - A_t^2 = A_w^2$$

Das kovariante System dazu:

$$\begin{aligned} x'(x, y, z, t, w) &= x - \frac{A_x}{A_w} w \\ y'(x, y, z, t, u) &= y - \frac{A_y}{A_w} w \\ z'(x, y, z, t, u) &= z - \frac{A_z}{A_w} w \\ t'(x, y, z, t, u) &= t - \frac{A_t}{A_w} w \\ u(x, y, z, t, w') &= \frac{1}{A_w} w \end{aligned}$$

$$\nabla x' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial x'}{\partial w}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \nabla x' dx' + \nabla y' dy' + \nabla z' dz' + \nabla t' dt' + \nabla u' du' = \left( \mathbf{i} dx' - \frac{A_x}{A_w} \mathbf{m} \right) dx' \\ &\quad + \left( \mathbf{j} - \frac{A_y}{A_w} \mathbf{m} \right) dy' + \left( \mathbf{k} - \frac{A_z}{A_w} \mathbf{m} \right) dz' + \left( \mathbf{l} - \frac{A_t}{A_w} \mathbf{m} \right) dt' + \frac{1}{A_w} \mathbf{m} du' \end{aligned}$$

$$(\gamma^{AB}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_x^2}{A_w^2} & \frac{A_x A_y}{A_w^2} & \frac{A_x A_z}{A_w^2} & \frac{A_x A_t}{A_w^2} & \frac{-A_x}{A_w^2} \\ \frac{A_y A_x}{A_w^2} & 1 + \frac{A_y^2}{A_w^2} & \frac{A_y A_z}{A_w^2} & \frac{A_y A_t}{A_w^2} & \frac{-A_y}{A_w^2} \\ \frac{A_z A_x}{A_w^2} & \frac{A_z A_y}{A_w^2} & 1 + \frac{A_z^2}{A_w^2} & \frac{A_z A_t}{A_w^2} & \frac{-A_z}{A_w^2} \\ \frac{A_t A_x}{A_w^2} & \frac{A_t A_y}{A_w^2} & \frac{A_t A_z}{A_w^2} & 1 + \frac{A_t^2}{A_w^2} & \frac{-A_t}{A_w^2} \\ \frac{-A_x}{A_w^2} & \frac{-A_y}{A_w^2} & \frac{-A_z}{A_w^2} & \frac{-A_t}{A_w^2} & \frac{1}{A_w^2} \end{pmatrix}$$

### 5.3 Konstantes $A_w$

Für eine erste einfache Rechnung sollen die Basisvektorprodukte  $g^{pq}$  nur vom Raumzeitpunkt im Minkowskiraum abhängen und nicht von der fünften Koordinate. Alle Ableitungen nach dieser fünften Koordinate werden dadurch Null. Da alle  $g^{ij}$  mit  $i, j = 1..4$  konstant entweder Eins oder Null sind, werden auch alle ihre Ableitungen Null. Es bleiben dann nur die fünf  $g^{p5} = g_{5p}$  abzuleiten! Als weitere Vereinfachung soll zunächst auch  $A_w$  konstant sein ( $A_w = 1$ ) und damit sämtliche Ableitungen von  $A_w$  verschwinden.

Wir bilden nun Christoffelsymbole aus den beiden metrischen Tensoren  $g^{pq}$  und  $g_{pq}$ . Griechische Indices stehen dabei für einen Bereich von 1 bis 4 (Minkowski-Raum, s.o.) und lateinische Großbuchstaben von 1 bis 5 (Boskovich-Raum):

$$\Gamma_{bc}^a = \sum_{D=1}^5 \frac{g^{aD}}{2} \left( \frac{\partial g_{CD}}{\partial u^B} + \frac{\partial g_{BD}}{\partial u^C} - \frac{\partial g_{CB}}{\partial u^D} \right) \quad (18)$$

Folgende Christoffelsymbole wollen wir zunächst untersuchen:  $\Gamma_{55}^5$ ,  $\Gamma_{55}^\alpha$  und  $\Gamma_{\beta 5}^\alpha = \Gamma_{5\beta}^\alpha$ . Beginnen wir mit  $\Gamma_{55}^5$ . Die ersten beiden Summanden sind Ableitungen nach  $u^5$ , die ja verschwinden sollen. Alle Ableitungen von  $A_w$  und damit von  $g_{55}$  verschwinden ebenfalls:

$$\Gamma_{55}^5 = \sum_{D=1}^5 \frac{g^{5D}}{2} \left( \frac{\partial g_{5D}}{\partial u^5} + \frac{\partial g_{D5}}{\partial u^5} - \frac{\partial g_{55}}{\partial u^D} \right) \quad (19)$$

$$= 0 \quad (20)$$

Dasselbe gilt für  $\Gamma_{55}^\alpha$ :

$$\Gamma_{55}^\alpha = \sum_{D=1}^5 \frac{g^{\alpha D}}{2} \left( \frac{\partial g_{5D}}{\partial u^5} + \frac{\partial g_{D5}}{\partial u^5} - \frac{\partial g_{55}}{\partial u^D} \right) \quad (21)$$

$$= 0 \quad (22)$$

Beim nächsten Christoffelsymbol  $\Gamma_{\beta 5}^\alpha$  ist der mittlere Summand Null und der Term für  $D = 5$  fällt weg. Da die ersten vier Dimensionen zum Minkowskiraum gehören, bleibt von der Zeile  $g^{\alpha\delta}$  nur das Diagonalelement  $g^{\alpha\alpha} = 1$  übrig:

$$\Gamma_{\beta 5}^\alpha = \sum_{D=1}^5 \frac{g^{\alpha D}}{2} \left( \frac{\partial g_{5D}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta D}}{\partial u^5} - \frac{\partial g_{\beta 5}}{\partial u^D} \right) \quad (23)$$

$$= \sum_{\delta=1}^4 \frac{g^{\alpha\delta}}{2} \left( \frac{\partial g_{5\delta}}{\partial u^\beta} + 0 - \frac{\partial g_{\beta 5}}{\partial u^\delta} \right) \quad (24)$$

$$= \frac{g^{\alpha\alpha}}{2} \left( \frac{\partial \left( \frac{-A_\alpha}{A_w^2} \right)}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \left( \frac{-A_\beta}{A_w^2} \right)}{\partial u^\alpha} \right) \quad (25)$$

$$= -\frac{1}{2A_w^2} \left( \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial u^\alpha} \right) \quad (26)$$

$$= -\frac{1}{2} \phi^2 F_{\alpha\beta} \quad (27)$$

Im letzten Schritt wurde für die Klammer der Feldstärketensor eingesetzt und die Ersetzung  $\phi = \frac{1}{A_w}$  vorgenommen.

Wenn wir jetzt den Ricci-Tensor  $R_{AB}$  ausrechnen:

$$R_{AB} = R_{ADB}^D = \sum_{D=1}^5 \frac{\Gamma_{AD}^D}{\partial u^B} - \sum_{D=1}^5 \frac{\Gamma_{AB}^D}{\partial u^D} + \sum_{D=1}^5 \sum_{E=1}^5 (\Gamma_{AD}^E \Gamma_{EB}^D - \Gamma_{AB}^E \Gamma_{ED}^D) \quad (28)$$

für  $A = B = 5$ , so verschwindet der erste Term wegen Ableitung nach  $u^5$  und die Terme direkt nach den Minuszeichen und sind Null. Es bleibt nur der dritte Summand übrig, bei dem wiederum für  $D = 5$  und  $E = 5$  Null herauskommt:

$$R_{55} = \sum_{D=1}^5 \frac{\Gamma_{5D}^D}{\partial u^5} - \sum_{D=1}^5 \frac{\Gamma_{55}^D}{\partial u^D} + \sum_{D=1}^5 \sum_{E=1}^5 \Gamma_{5D}^E \Gamma_{E5}^D - \sum_{D=1}^5 \sum_{E=1}^5 \Gamma_{55}^E \Gamma_{ED}^D \quad (29)$$

$$= \sum_{\delta=1}^4 \sum_{\epsilon=1}^5 \Gamma_{5\delta}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 5}^\delta \quad (30)$$

$$= \sum_{\delta=1}^4 \sum_{\epsilon=1}^5 \left(-\frac{1}{2}\right) \phi^2 F_{\epsilon\delta} \left(-\frac{1}{2}\right) \phi^2 F_{\delta\epsilon} \quad (31)$$

$$= \sum_{\delta=1}^4 \sum_{\epsilon=1}^5 \frac{1}{4} \phi^4 F_{\epsilon\delta} F_{\delta\epsilon} \quad (32)$$

$$= \frac{1}{4} \phi^4 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) \quad (33)$$

$R_{55}$  entspricht also der Summe aus statischer elektrischer und statischer magnetischer Energie sowie der elektromagnetischen Strahlungsenergie.

Wenn wir jetzt auch noch fordern, dass  $R_{AB} = 0$  sein soll, also auch  $R_{55} = 0$ , so muss bei  $\phi = 1 = \text{const.}$  also auch die elektromagnetische Energie und damit das Feld Null sein,  $A_w$  also orthogonal auf dem Minkowskiraum stehen. Wir müssen daher  $A_w$  und damit  $\phi$  variabel halten, was wir im nächsten Abschnitt tun wollen.

## 5.4 Variables Aw

Die Ableitungen von  $A_w$  und damit insbesondere  $g_{55}$  verschwinden nun nicht mehr, mit Ausnahme der Ableitung nach  $u^5$ . Wir bilden nun zunächst die Christoffelsymbole aus dem vorherigen Abschnitt:

$$\Gamma_{55}^5 = \sum_{D=1}^5 \frac{g^{5D}}{2} \left( -\frac{\partial g_{55}}{\partial u^D} \right) \quad (34)$$

$$= \sum_{\delta=1}^4 \frac{A^\delta}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial u^\delta} \left( \frac{1}{A_w^2} \right) \right) \quad (35)$$

$$= \sum_{\delta=1}^4 -\frac{1}{A_w^3} A^\delta \frac{\partial A_w}{\partial u^\delta} \quad (36)$$

$$= \sum_{\delta=1}^4 -\phi A^\delta \frac{\partial \phi}{\partial u^\delta} \quad (37)$$

wobei zum Schluss  $1/A_w = \phi$  substituiert wurde, um Quadrate im Nenner und Kuben von  $A_w$  zu vermeiden. Das Ergebnis lässt sich auffassen als Produkt aus 4er-Vektor  $A$  und 4er-Gradient  $\phi$  multipliziert mit  $\phi$ .

Für  $\Gamma_{55}^\alpha$  gilt das Gleiche. Zusätzlich wird  $g^{\alpha\delta}$  hier zu einem Kronecker-Symbol, weshalb sich die Summe auf einen Term reduziert:

$$\Gamma_{55}^\alpha = \sum_{D=1}^5 \frac{g^{\alpha D}}{2} \left( -\frac{\partial g_{55}}{\partial u^D} \right) \quad (38)$$

$$= \frac{g^{\alpha\alpha}}{2} \left( -\frac{\partial g_{55}}{\partial u^\alpha} \right) \quad (39)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( \frac{1}{A_w^2} \right) \quad (40)$$

$$= \frac{1}{A_w^3} \frac{\partial A_w}{\partial u^\alpha} \quad (41)$$

$$= -\phi \frac{\partial \phi}{\partial u^\alpha} \quad (42)$$

Beim nächsten Christoffelsymbol  $\Gamma_{\beta 5}^\alpha$  kommt nun der Term für  $D = 5$  hinzu, bei dem der zweite und dritte Summand wegen Ableitung nach  $u^5$  verschwinden. Beim  $g^{\alpha\alpha}$ -Term kommt nach der Produktregel noch Ableitungen von  $A_w$  hinzu:

$$\Gamma_{\beta 5}^{\alpha} = \sum_{D=1}^5 \frac{g^{\alpha D}}{2} \left( \frac{\partial g_{5D}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta D}}{\partial u^5} - \frac{\partial g_{\beta 5}}{\partial u^D} \right) \quad (43)$$

$$= \frac{g^{\alpha\alpha}}{2} \left( \frac{\partial \left( \frac{-A_{\alpha}}{A_w^2} \right)}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial \left( \frac{-A_{\beta}}{A_w^2} \right)}{\partial u^{\alpha}} \right) + \frac{g^{\alpha 5}}{2} \left( \frac{\partial \left( \frac{-1}{A_w^2} \right)}{\partial u^{\beta}} \right) \quad (44)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{A_w^2} \left( \frac{\partial A_{\beta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} \right) + \frac{1}{2} \frac{(-2)}{A_w^3} \left( (-A_{\alpha}) \frac{\partial A_w}{\partial u^{\beta}} - (-A_{\beta}) \frac{\partial A_w}{\partial u^{\alpha}} \right) \quad (45)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(-2)}{A_w^3} (+A_{\alpha}) \frac{\partial A_w}{\partial u^{\beta}} \quad (46)$$

$$= \frac{1}{2} \phi^2 F_{\alpha\beta} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial u^{\alpha}} A_{\beta} \quad (47)$$

Man sieht, dass die Komplexität zunimmt. Die restlichen Christoffesymbole geben wir daher ohne Rechnung an und mit Einsteinscher Summenkonvention:

$$\Gamma_{55}^5 = k \phi A^{\mu} \nabla^{\mu} \phi \quad (48)$$

$$\Gamma_{55}^{\mu} = \phi \nabla^{\mu} \phi \quad (49)$$

$$\Gamma_{5\mu}^5 = \frac{1}{2} \phi^2 k^3 A^{\nu} F_{\mu\nu} + k^2 \phi (A^{\nu} \nabla_{\nu} \phi) A_{\mu} \phi^{-1} + \nabla^{\mu} \phi \quad (50)$$

$$\Gamma_{\nu 5}^{\mu} = k \phi A_{\nu} \nabla^{\mu} \phi + \frac{1}{2} k^2 \phi^2 F_{\nu}^{\mu} \quad (51)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^5 = k \phi^{-1} (A_{\mu} \nabla_{\nu} \phi) + k^3 A_{\mu} A_{\nu} \phi A^{\alpha} \nabla_{\alpha} \phi \quad (52)$$

$$+ \frac{1}{2} k^3 \phi A^{\alpha} [A_{\mu} F_{\alpha\mu} + A_{\nu} F_{\alpha\mu}] + \frac{1}{2} k (\nabla_{\nu} A_{\nu} + \nabla_{\mu} A_{\nu}) \quad (53)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = k^2 \phi A_{\mu} A_{\nu} \nabla^{\beta} \phi + \frac{1}{2} k^3 \phi^2 [A_{\nu} F_{\mu}^{\beta} + A_{\mu} F_{\nu}^{\beta}] \quad (54)$$

Daraus ergeben sich die Komponenten des Ricci-Tensors:

$$R_{55} = \frac{1}{4} k^2 \phi^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \phi \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi \quad (55)$$

$$R_{5\mu} = \frac{1}{2} k \phi^2 \nabla_{\alpha} F^{\alpha\mu} + \frac{3}{2} k^2 \phi \nabla_{\alpha} \phi F^{\alpha\mu} \quad (56)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} k^2 \phi^2 F_{\alpha}^{\mu} F^{\nu\alpha} + \phi^{-1} \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} \phi \quad (57)$$

Nun können wir  $R_{AB} = 0$  fordern und erhalten aus der zweiten Gleichung:

$$\nabla_{\alpha} F^{\alpha\mu} = 3 \nabla_{\alpha} \phi F^{\alpha\mu} \quad (58)$$

## References

- [1] O. Jefimenko, *Causality, electromagnetic Induction and Gravitation*, Electric Scientific Company, Star City 1992

- [2] K. Simonyi, *Theoretische Elektrotechnik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989
- [3] Th. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaft, Phys.-Math. Klasse, Berlin 1921